Dichtheid,massa,bulkmodulus

Dichtheid ρ=massa/volume
verband dichtheid ensamendrukbaarheid van olie
ρ hangt af van de druk en de temperatuur(complex)

Een bruikbare (1e orde) benadering : $\rho = \rho_0 (1 + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho}{dP} dP + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho}{dT} dT)$

$$= \rho_0 (1 + \frac{1}{E} dP - \alpha dT)$$

Toestandvergelijking van olie: $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dP}{E} \quad (\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dP}{E} = -\frac{dV}{V})$

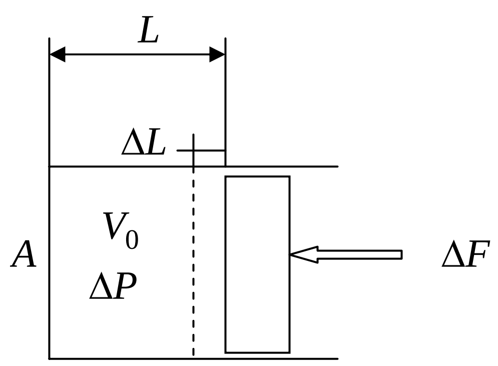
Voor gassen geldt (PV=RT): $\frac{dV}{V} = -\frac{dP}{P}$ wet van Hooke: $\frac{dL}{L} = \frac{\sigma}{E_{mat}}$

E elasticiteitmodulus(bulkmodulus) E~ $1.4 \div 1.6 10^4 \, bar \, (1.4 \div 1.6 \; 10^9 \frac{N}{m^2})$

E hangt af van druk en in mindere mate van de temperatuur: $E = E_0 + K_p P. \quad (K_p \approx 9.6)$

<u>*Temperatuureffect*</u> ρ
bruikbare relatie: $\rho_T = \frac{\rho_0}{1 + \beta T}. \quad \beta \approx 0.65.10^{-3} K^{-1}$

Olie kolom als veer:



$$\Delta P = \frac{\Delta F}{A}; V_o = AL \; ; \Delta V = A \Delta L$$

Toestandvergelijking:

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta P}{E} = -\frac{\Delta V}{V} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{A \Delta L}{V} = -\frac{\Delta P}{E} = -\frac{\Delta F}{AE}$$

Veerstijfheid: $\frac{\Delta F}{\Delta L} = \frac{A^2 E}{V_0} = C_0 \quad (\frac{N}{m})$

V_0 is het totale volume onder druk

Voorbeeld: $A = 12\,cm^2 = 12.10^{-4} m^2$

$$E = 10^4\,bar = 10^9 \frac{N}{m^2}$$

$$L = 60\,cm = 0.6\,m$$

$$C_0 = \frac{A^2 E}{AL} = \frac{AE}{L} = 2.10^6 \frac{N}{m}$$

Lijkt erg veel!

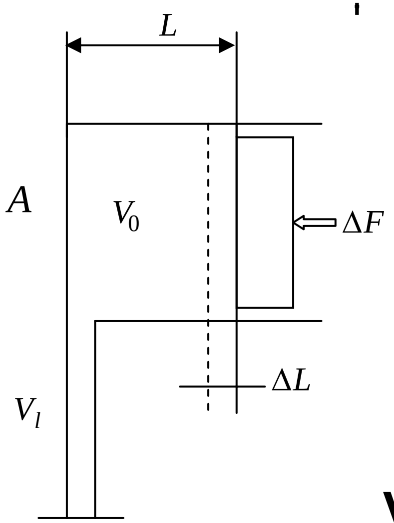
Eigenfrequentie massa –veersystem:

$$\omega_n^2 = \frac{veerstijfheid}{massa} = \frac{C_0}{M}$$

$$C_0 = 2.10^6 \frac{N}{m}\ ; M = 200\, kg$$

$$\omega_n^2 = \frac{2.10^6}{200}; \omega_n = 100\, rad/\sec(\approx 15 H_z)$$

Elasticiteit leiding en cilinder;



$$\Delta V_{olie} = \frac{V_0 + V_l}{E} \Delta P$$

$$\Delta V_{leiding} = \frac{dV}{dP} \Delta P; \quad \frac{dV}{dP} \Rightarrow elasticite\ it\ \ leiding$$

$$\Delta V = A \Delta L = (\frac{V_0 + V_l}{E} + \frac{dV}{dP}) \Delta P$$

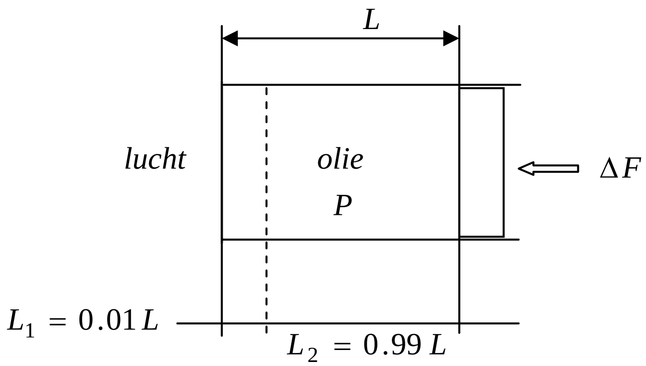
$$A^2 \Delta L = (\frac{V_0 + V_l}{E} + \frac{dV}{dP}) \Delta F$$

$$\frac{1}{E_{eff}} = \frac{V_0 + V_l}{E} + \frac{dV}{dP}$$

Veerstijfheid C_0 wordt verlaagd door:

-Elasticiteit van leiding en cilinder
-schadelijk volume V_l tussen klep en cilinder
-opgeloste lucht in olie

Lucht in olie (bijvoorbeeld 1%)



$$druk\ in\ cilinder\ \ P = 100\,bar$$
$$E = 10000\ bar$$

veerstijfheid olieveer : $C_{olie} = \dfrac{AE}{0.99L} \approx \dfrac{AE}{L}$

veerstijfheid luchtveer: $C_{lucht} = \dfrac{A^2 P}{V_{lucht}} = \dfrac{A^2 P}{0.01AL} = \dfrac{AP}{0.01L}$ (volgt uit de gaswet $PV = RT \Rightarrow P\Delta V + V\Delta P = 0$)

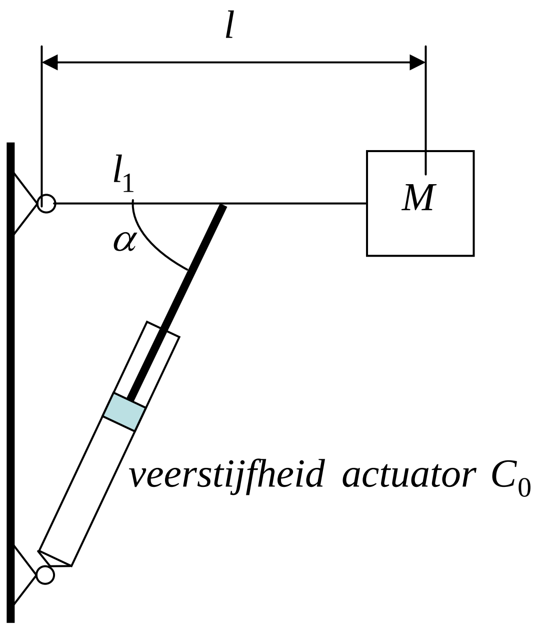
Totale veerstijfheid van 2 veren in serie:

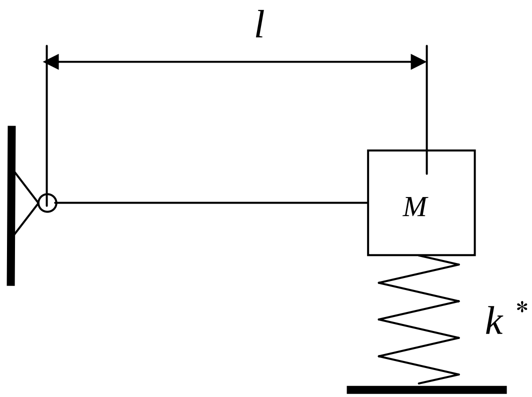
$$\frac{1}{C_{tot}} = \frac{1}{C_{olie}} + \frac{1}{C_{lucht}} = \frac{L}{EA} + \frac{0.01.L}{100A} = \frac{L}{A}\left(\frac{1}{E} + \frac{1}{10^4}\right)$$

$$C_{tot} = 0.5.\frac{AE}{L}$$

<u>Veerstijfheid is gehalveerd</u> **!!**

Eigenfrequentie ω_n:

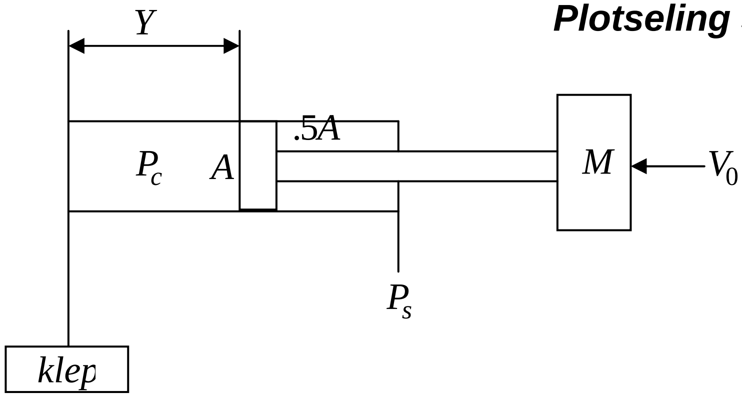




$$K^* = C_0 \left(\frac{l_1}{l} \sin\alpha\right)^2$$

$$\omega_n^2 = \frac{K^*}{M}$$

Plotseling sluit de klep



$$kin.energie = \frac{1}{2} M V_0^2$$

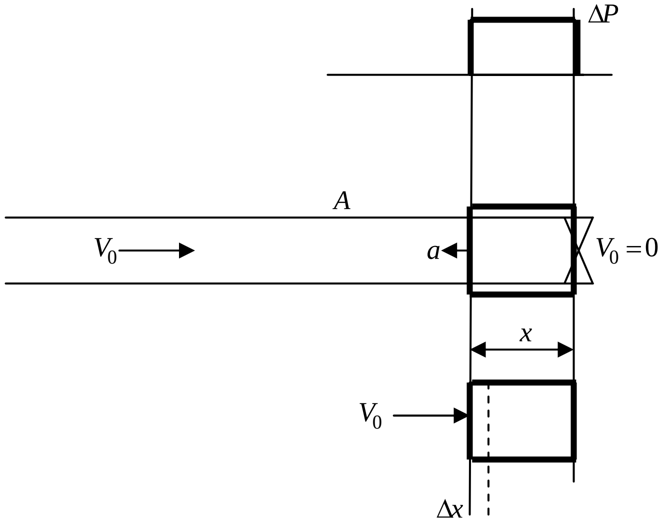
$$pot.energie\ van\ olie\ kolom: \frac{1}{2} C_y (\Delta y)^2 = \frac{1}{2} \frac{(C_y \Delta y)^2}{C_y}$$

$$A\Delta P = \sqrt{C_y M}\, V_0 \Rightarrow \Delta P = \frac{\omega_n M}{A} V_0$$

ω_n *hangt af van de actuatorpositie* Y

***Dynamische verschijnselen in (lange) leidingen*:**

Waterslag(“waterhammer”)



kinetische energie massadeeltje x: $\frac{1}{2}(Ax\rho)V_0^2$

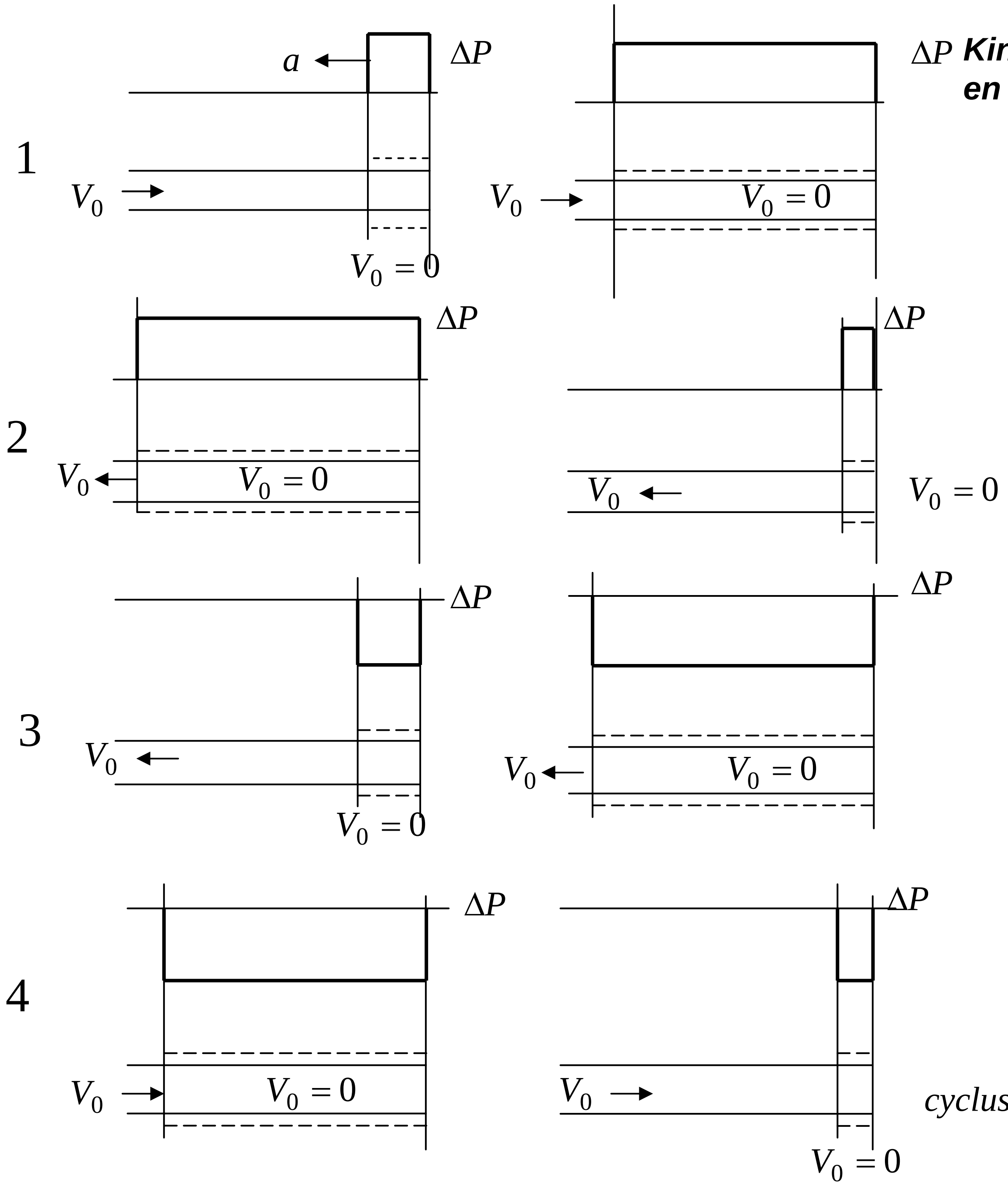
potentiele energie massadeeltje x: $\frac{1}{2}C(\Delta x)^2 = \frac{1}{2}\frac{(C\Delta x)^2}{C}$

Kin.energie ⟺ **Pot.energie** $\frac{1}{2}(Ax\rho)V_0^2 = \frac{1}{2}\frac{(C\Delta x)^2}{C}$

$$C\Delta x = \Delta PA$$

$$\Delta P = \rho a V_0 \quad a = geluidsnelheid = \sqrt{E/\rho}$$

Wat gebeurt er daarna?



Kin.erergie wordt omgezet in pot.energie en omgekeerd!!

$$0 \le t \le \frac{L}{a}$$

$$\frac{L}{a} \le t \le 2\frac{L}{a}$$

$$2\frac{L}{L} \le t \le 3\frac{L}{a}$$

$$3\frac{L}{a} \le t \le 4\frac{L}{a}$$

$$cyclustijd\ is: 4\frac{L}{a}\ ; eigenfrquentie\ f = \frac{1}{4}\frac{a}{L}$$

Lange leiding 1[e] eigenfrequentie: $f = \frac{1}{4}\frac{a}{L}$

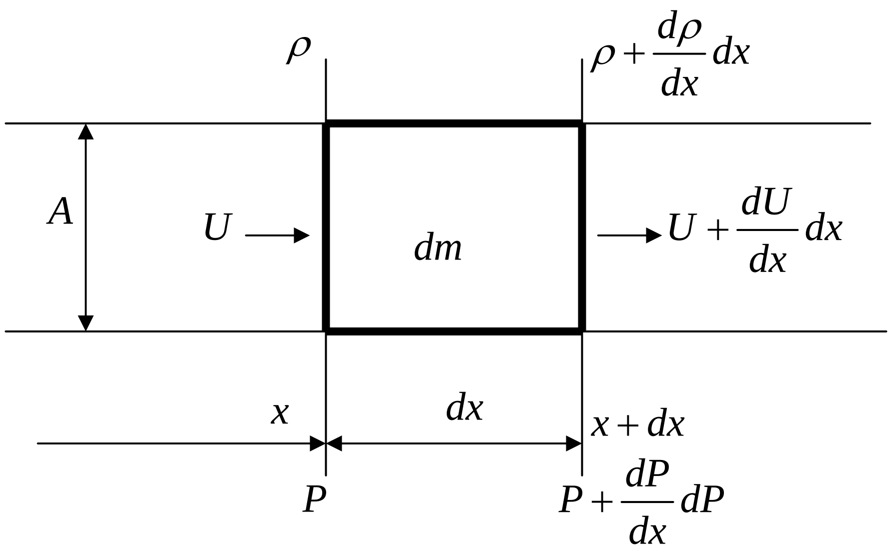
$$\text{b.v a} = 1200\frac{m}{\sec}; L = 10\,m$$

$$f = \frac{1200}{4*10} = 30\,Hz$$

Algemeen

de vergelijkingen welke niet-stationaire stroming in lange leidingen beschrijven

1 ***-massabalans:*** $(UA\rho) - (U + \frac{dU}{dx}dx)A(\rho + \frac{d\rho}{dx}dx) = \frac{d}{dt}(\rho A dx)$



Toestandvgl. $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dP}{E}$

$$(1) \qquad \frac{1}{E}\frac{dP}{dt} = -\frac{dU}{dx}$$

2 ***-impulsvergelijking:***

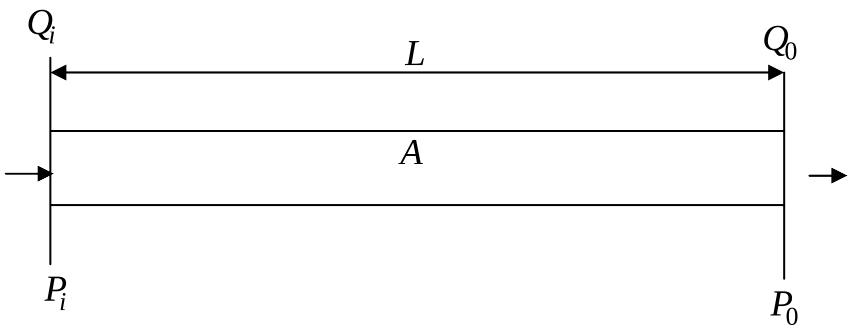
$$PA - (P + \frac{dP}{dx}dx)A = dm\frac{dU}{dt}$$

$$(2) \qquad \frac{dP}{dx} = -\rho\frac{dU}{dt}$$

Beide vergelijkingen leiden tot de bekende golfvergelijking $P_{tt} = a^2 P_{xx}$

Oplossingen:

- **-numeriek (in tijd domeim) m.b.v karakteristieke methode**
  waarbij Δx=aΔt
  wrijvings term vaak in de vorm van const.U|U|
- **-verdelen van de leiding in kleine stukjes**
- **-bepalen van een overdrachtfunctie**



$Q_0 = F(P_0) \quad b.v. Q_0 = RP_0 \; of \; Q_0 = K\sqrt{P_0}$

we zoeken naar een oplossing in de gedaante van:

$$Q_0 = AQ_i + BP_i$$

$$P_0 = CQ_i + DP_i$$

$$\begin{pmatrix} Q_0 \\ P_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \; B \\ C \; D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_i \\ P_i \end{pmatrix}$$

voor A,B,Cen D vinden we:

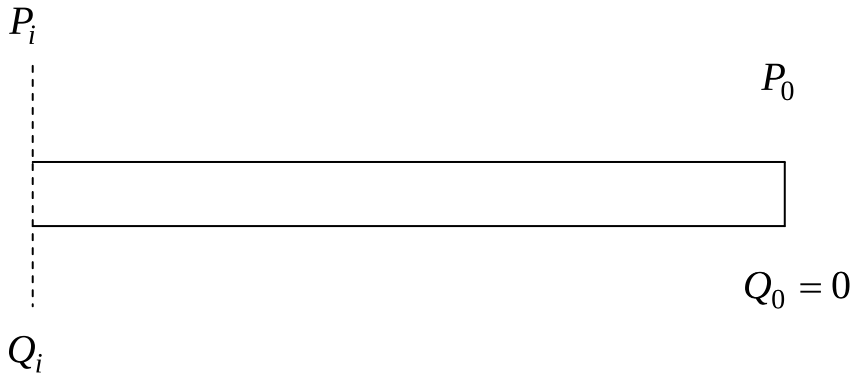
$$A_1 = D_1 = \cosh(s\frac{L}{a}) \;;B_1 = -\frac{1}{Z}\sinh(s\frac{L}{a}) \;;C_1 = -Z\sinh(s\frac{L}{a})$$

$a = geluidsnelheid$

$$Z = \frac{\rho a}{A}$$

s *Laplace operator*

voorbeeld van afgesloten leiding:



overdracht-functie:

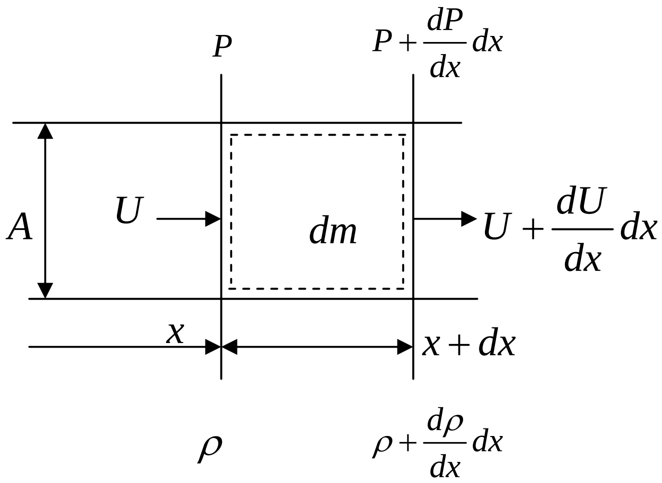
$$\frac{P_0}{P_i} = \frac{1}{\cosh(s\frac{L}{a})} \qquad s = j\omega(\text{sinusvormig ingang signaal } P_i)$$

$$\frac{P_0}{P_i} = \frac{1}{\cos(\omega\frac{L}{a})} \qquad \textit{resonantie treedt op als}: \frac{L}{a}\omega = k\frac{\pi}{2}$$

$$1^e\,(k=1) \;\; \textit{eigenfrequentie} \;\; f_1 = \frac{1}{4}\frac{a}{L}!!$$

***Systeem is ongedempt* !!**
treedt lekkage op Q_0>0 gevolg:kleine verschuiving van f_1 en demping!!
lek introduceert demping

Leiding dynamika



$U = U(x,t), P = P(x,t)$

$N.B$ *snelheid u hangt af x, t en de postie r in de buis*

U = gemiddelde snelheid

P = constant in doorsnede

massabalans:

$$\rho AU - (\rho + \frac{d\rho}{dx}dx)A(U + \frac{dU}{dx}dx) = \frac{d}{dt}(\rho A dx) = Adx\frac{d\rho}{dt}$$

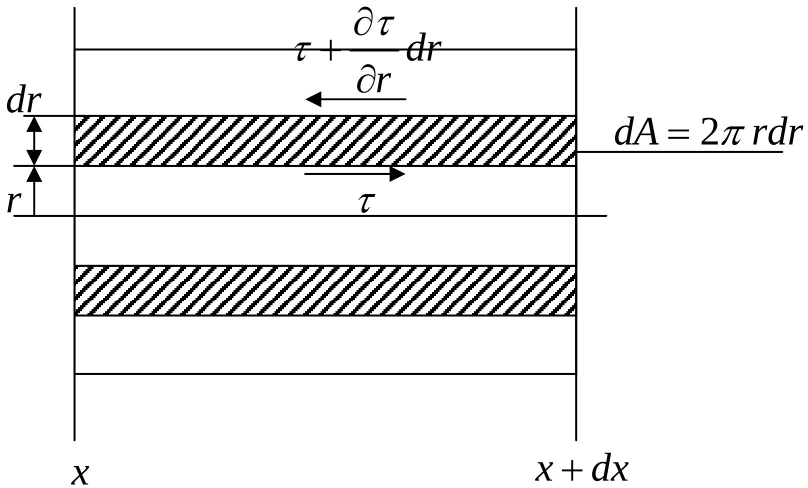
$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\frac{dU}{dx} - U\frac{d\rho}{dx} \qquad \frac{d\rho}{dx} \text{ is verwaarloosbaar}$$

(1) $$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\frac{dU}{dx}$$

ook geldt: $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dP}{E}$

(1a) $$\frac{1}{E}\frac{dP}{dt} = -\frac{dU}{dx}$$

-impulsbalans



P $\qquad\qquad\qquad$ $P + \frac{\partial P}{\partial x} dx$

druk component :

$$xPdA - (P + \frac{\partial P}{\partial x} dx)dA = -\frac{\partial P}{\partial x} dAdx$$

$$dA = 2\pi\, rdr$$

viskeuze wrijvings component :

$$\tau 2\pi rdx - (\tau + \frac{\partial \tau}{\partial r} dr)(r + dr)2\pi dx = -(\tau dr + r\frac{\partial \tau}{\partial r} dr)2\pi dx$$

Impulsbalans: $\frac{\partial P}{\partial x} - (\frac{\tau}{r} + \frac{\partial \tau}{\partial r}) = \rho \frac{\partial u}{\partial t} \quad ; \quad met \ \tau = \mu \frac{\partial u}{\partial r} \qquad (3)$

$$u = u(x,t,r)!!$$

***<u>Wrijvingsterm maakt oplossing complex</u>*!!**

(*R.Oldenburger,R.EGoodson,R.S.Raizada en vele anderen)*

Voor wrijvingloze srtoming : $\tau = 0$

de vergelijking (3) gaat over in: $-\dfrac{\partial P}{\partial x} = \rho \dfrac{\partial U}{\partial t}$

Samengevat:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \dfrac{1}{E}\dfrac{\partial P}{\partial t} = -\dfrac{\partial U}{\partial x} & P_t = -EU_x \\ \dfrac{\partial P}{\partial x} = -\rho\dfrac{\partial U}{\partial t} & P_x = -\rho U_t \\ \dfrac{E}{\rho}P_{xx} = P_{tt} \quad (met\,\dfrac{E}{\rho} = a^2) \quad de\,golfvergelijking!! & \end{array}}$$

Invoering van de Laplace-operator:

$$\frac{1}{E}\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad sP = -E\frac{dU}{dx}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho\frac{\partial U}{\partial t} \qquad \frac{dP}{dx} = -\rho sU$$

$$voer\ in: Q = UA, Z = \frac{\rho a}{A} en \quad a^2 = \frac{E}{\rho}$$

De vergelijkingen leiden tot een simpele gewone diff. vergelijking:

A en B zijn willekeurige konstanten!

$$\frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{s^2}{a^2}Q = 0 \quad \text{oplossingen } Q = Ae^{\lambda x}$$

$$Q = Ae^{\frac{s}{a}x} + Be^{\frac{-s}{a}x}$$

$$P = -AZe^{\frac{s}{a}x} + BZe^{\frac{-s}{a}x}$$

$$randvoorwaarden: \ x = 0; P = P_i \ en \ Q = Q_i$$

uitwerking geeft als resultaat: $$Q_x = Q_i \cosh(\frac{s}{a}x) - \frac{P_i}{Z}\sinh(\frac{s}{a}x)$$

$$P_x = -Q_i Z \sinh(\frac{s}{a}x) + P_i \cosh(\frac{s}{a}x)$$

P_x *en* Q_x *zijn druk en flow in willekeurige doorsnede x*

Bijzonder geval : $x = L; Q = Q_0$ *en* $P = P_0$

$$Q_0 = Q_i \cosh(\frac{s}{a}L) - \frac{P_i}{Z}\sinh(\frac{s}{a}L)$$

$$P_0 = -Q_i Z \sinh(\frac{s}{a}L) + P_i \cosh(\frac{s}{a}L)$$

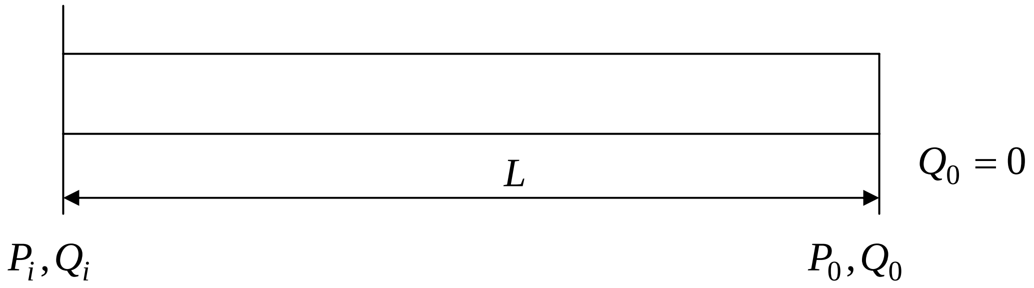
stel : $A_1 = \cosh(\frac{s}{a}L); B_1 = -\frac{1}{Z}\sinh(\frac{s}{a}L); C_1 = -Z\sinh(\frac{s}{a}L)$

$$Q_0 = A_1 Q_i + B_1 P_i$$

$$P_0 = C_1 Q_i + A_1 P_i \qquad \begin{pmatrix} Q_0 \\ P_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_i \\ P_i \end{pmatrix}$$

waarbij $A_1^2 - B_1 C_1 = 1 \ (\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1)$

voorbeeld:lange leiding afgesloten aan het eind:



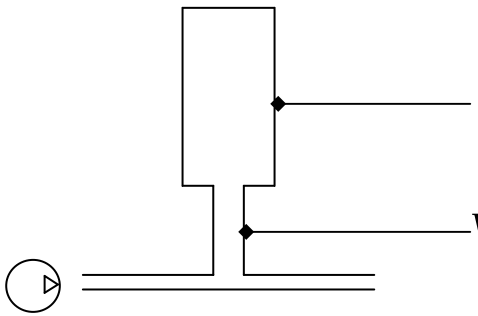
overdracht functie

$$\frac{P_0}{P_i} = \frac{1}{\cosh(\frac{s}{a}L)} \quad s = j\omega; \qquad \frac{P_0}{P_i} = \frac{1}{\cos(\frac{\omega}{a}L)}$$

$$eigenfrequenties\ : \frac{\omega}{a}L = k\frac{\pi}{2}$$

$$k = 1 \;\; f_1 = \frac{1}{4}\frac{a}{L} \;\; (!!)$$

Helmholtz-filter



$V_2; A_2; L_2$

$V_1; A_1; L_1$

toepassing van de basisvergelijking op de 2 leidingen en na vereenvoudiging:

$$1+\frac{Z_1}{Z_2}\frac{L_1L_2}{a^2}s^2 = 0 \quad s = j\omega \qquad \textit{de eigenfrequentie}: \ \omega_n^2 = a^2\frac{A_1}{L_1V_2}$$

Massa van leiding L_1 staat op veer leiding L_2!!!

$$\textit{massa leiding } L_1 \Rightarrow \rho L_1 A_1$$

$$\textit{olie veerstijfheid leiding } L_2 \Rightarrow C_0 = \frac{A_1 E}{V_2}$$

$$\textit{eigenfrequentie } \omega_n^2 = \frac{C_0}{\rho L_1 A_1} = a^2\frac{A_1}{L_1V_2}$$